**Notations.**

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels. $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$
$\mathbb{R}^{+*} = \mathbb{R}^+ - \{0\}$

La partie II est indépendante de la partie I, III 3) utilise II 3), III 4) utilise I 3), IV 4) b) utilise III 3).

## PARTIE I

On considère les intégrales $\alpha_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{t^2\,dt}{(1+t^2)^n}$ ; $\beta_n = \displaystyle\int_0^\infty \frac{dt}{(1+t^2)^n}$.

1) *a*) Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$ ces intégrales convergent-elles ?

*b*) Exprimer $\alpha_n$ en fonction de $\beta_n$ et $\beta_{n-1}$. Calculer $\beta_n$, en déduire $\alpha_n$.

2) Démontrer l'inégalité : $|\beta_n| < \dfrac{\pi}{2\sqrt{n}}$ (minorer $(1+t^2)^n$ par $1+nt^2$). En déduire $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n$ et $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n$.

3) On pose $S_n = \sum\limits_{p=2}^{n} \alpha_p$. Démontrer l'inégalité :

$$\left| S_n - \int_0^\infty \frac{dt}{1+t^2} \right| \leqslant \beta_n .$$

En déduire que la série $\Sigma\, \alpha_n$ converge.

Calculer : $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 \times 3 \times \ldots\ldots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \ldots\ldots \times 2n} \right)$

## PARTIE II

Dans cette partie $a$ est un nombre réel tel que $0 < a < 1$.

$h : t \longrightarrow h(t)$ est une application de $[0, 1[$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant la propriété P suivante :

P : $h$ est continue sur $[0, 1[$ et $H(t) = \dfrac{h(t) - h(0)}{t}$ a une limite finie quant $t$ tend vers 0.

Si $\overline{H}$ est le prolongement par continuité de $H(t)$ sur $[0, 1[$ on pose : $A = \sup\limits_{t \in [0,a]} |H(t)|$

1) Montrer que les fonctions :

$$h_1 : t \longrightarrow \frac{1}{(1-t^2)^r} \qquad r \in \mathbb{R}$$

$$h_2 : t \longrightarrow \frac{(1-t)^r}{(2-t)^s} \qquad s \in \mathbb{R}$$

vérifient la propriété P.

2) On pose pour $0 < x < a$, $\lambda \in \mathbb{R}^{+*}$

$$k_a(x) = x^\lambda \int_a^x \frac{h(t)\,dt}{t^{\lambda+1}} \qquad \Delta_a(x) = x^\lambda \int_a^x \frac{H(t)}{t^\lambda}\,dt$$

$$k(x) = \frac{1}{x^\lambda} \int_0^x t^{\lambda-1} h(t)\,dt \qquad \Delta(x) = \frac{1}{x^\lambda} \int_0^x t^\lambda H(t)\,dt .$$

a) Démontrer les inégalités :

$$\left| \Delta_a(x) \right| \leqslant \frac{A}{\left|1-\lambda\right|} \left| x - \frac{x^\lambda}{a^{\lambda-1}} \right| \qquad \text{si } \lambda \neq 1$$

$$\left| \Delta_a(x) \right| \leqslant A\,x \left[\operatorname{Log} \frac{a}{x}\right] \qquad \text{si } \lambda = 1$$

$$\left| \Delta(x) \right| \leqslant \frac{Ax}{\lambda+1}$$

b) Déduire du a) :

$$\lim_{x \to 0} k_a(x) = -\frac{h(0)}{\lambda}$$

$$\lim_{x \to 0} k(x) = \frac{h(0)}{\lambda}$$

3) On pose pour $\alpha \in \mathbb{R}^{+*}$, $\beta \in \mathbb{R}^{+*}$, $0 < x < 1$

$$f(x) = \frac{(1-x^2)^\alpha}{x^\beta} \int_0^x \frac{t^{\beta-1}}{(1-t^2)^{\alpha+1}}\,dt$$

$$g(x) = (1-x)^\alpha \int_{\frac{1}{2}}^x \frac{t^{\beta-1}}{(1-t^2)^{\alpha+1}}\,dt$$

a) Montrer que $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \frac{1}{\beta}$.

b) Montrer que $\lim\limits_{x \to 1^-} g(x) = \frac{1}{2^{\alpha+1}\alpha}$

(poser $t = 1-u$ et $y = 1-x$).

En déduire $\lim\limits_{x \to 1} f(x)$.



.../...

## PARTIE III

Dans cette partie $a > -1$, $b > 0$. On considère la série entière

$$\Sigma\, u_n\, x^{2n} \qquad \text{où} \qquad u_n = \frac{a\,(a+1)\,\ldots\ldots\,(a+n-1)}{b\,(b+1)\,\ldots\ldots\,(b+n-1)} \qquad \text{pour } n \geqslant 1\,.$$

1) Vérifier que le rayon de convergence de la série est 1.

2) On pose $\varphi\,(x) = 1 + \sum_{1}^{\infty} u_n\, x^{2n}$ pour $|x| < 1$. Montrer que $\varphi$ vérifie l'équation différentielle :

(E) $$x\,(1-x^2)\,y' + 2\,[\,(b-1) - ax^2]\,y = 2\,(b-1)\,.$$

3) On suppose $b > 1$ et $b - a > 1$.

*a*) Déterminer la solution générale de (E) sur $]-1,0[\ \cup\ ]0,1[$. En déduire l'expression de $\varphi\,(x)$.

*b*) Déterminer $\lim\limits_{x \to 1} \varphi\,(x)$.

4) On suppose $b = 1$, $a = -\frac{1}{2}$. Déterminer $\varphi\,(x)$, en déduire en utilisant I 3) que $\Sigma\, u_n\, x^{2n}$ converge absolument pour $|x| = 1$ et que $\varphi$ est continue pour $|x| = 1$.

## PARTIE IV

On se propose de démontrer la convergence de $\Sigma\, u_n$ définie au III et de calculer sa somme pour $b > 1$.

1) Démontrer pour $\alpha > 1$ et $n \geqslant 1$.

(1) $$\sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{p^{\alpha}} < \frac{1}{(\alpha-1)\,n^{\alpha-1}} \qquad \left(\text{comparer à l'intégrale } \int_n^{\infty} \frac{dt}{t^{\alpha}}\right)$$

2) Etudier pour $x \geqslant 1$ les variations de la fonction :

$$\mu\,(x) = \frac{x+a}{x+b} - \left(\frac{x+b-1}{x+b}\right)^{b-a} \qquad a \in \mathbb{R}\,,\ b \in \mathbb{R}^+\,,\ b-a > 1\,.$$

En déduire $\mu\,(x) < 0$ pour $x \geqslant 1$.

3) On considère pour $b > 0$, $a > -1$ les séries $\Sigma\, u_n$ et $\Sigma\, v_n$ de terme général pour $n \geqslant 1$.

$$u_n = \frac{a\,(a+1)\,\ldots\,.\,(a+n-1)}{b\,(b+1)\,\ldots\ldots\,(b+n-1)}\,,\quad v_n = \frac{1}{(n+b-1)^{\alpha}}$$

avec :

$$\alpha = b - a \ \text{ si } b - a > 1\,, \qquad \alpha = 1 \ \text{ si } b - a \leqslant 1\,.$$

*a*) Démontrer les inégalités :

$$(2) \qquad \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| < \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \text{si} \quad b - a > 1$$

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \geqslant \frac{v_{n+1}}{v_n} \quad \text{si} \quad b - a \leqslant 1 .$$

En déduire :

$$(3) \qquad |u_n| \leqslant |a| \, b^{\alpha - 1} \, v_n \quad \text{si} \quad b - a > 1$$

$$|u_n| \geqslant |a| \, v_n \quad \text{si} \quad b - a \leqslant 1$$

*b*) Nature de la série $\Sigma u_n$ suivant les valeurs attribuées à $b - a$ .

4) On suppose $b - a > 1$ et soit $\varphi$ la fonction définie dans III 2).

*a*) Démontrer pour $n$ fixé l'inégalité :

$$(4) \qquad |\varphi(x) - \varphi(1)| < (1-x^2) \sum_{p=1}^{n} p \, |u_p| + \sum_{n+1}^{\infty} |u_p|$$

En déduire l'inégalité pour $b > 1$

$$(5) \qquad |\varphi(x) - \varphi(1)| < (1-x^2) \, n \, S + \frac{b^{\alpha-1} \, |a|}{(\alpha-1) n^{\alpha-1}}$$

où :

$$\alpha = b - a \qquad S = \sum_{p=1}^{\infty} |u_n|$$ (utiliser les inégalités (1) et (3) .

*b*) En prenant $n$ tel que $\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}} < n < \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ montrer que $\varphi$ est continue pour $|x| = 1$ .

En déduire la valeur de $\sum_{1}^{\infty} |u_n|$ pour $b > 1$ .